Ex12 : $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$

1) a) $x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou x=1 ou x=-1. $D_f=\mathbb{R}^*/\{-1,1\}$

b) $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$

$$f(x)=\frac{x^2(x^2-1)+a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x^4+(a+b+c-1)x^2+(b-c)x-a}{x^3-x}$$

Par identification : on aura : $\begin{cases}a+b+c-1=-6\\ b-c=0\\ -a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=c=-2\end{cases}$ d'où

$$f(x)=x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$

2) $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$ $\qquad f'(x)>0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+	0	+	‖	+	
f(x)	$+\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) $\lim\limits_{|x|\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\dfrac{-1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=0$

les droite d'équations respectives x=-1 ; x=0 ; x=1 et y=x sont des asymptotes à (C)

4)

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-6x^2+1=0$ et $x\in D_f \Leftrightarrow (x^2-3)^2=8$ et $x\in D_f$

$\Leftrightarrow x^2-3=\sqrt{8}$ ou $x^2-3=-\sqrt{8} \Leftrightarrow x^2=3+\sqrt{8}$ ou $x^2=3-\sqrt{8}$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ou $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ou $x=-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ou $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\sqrt{3+2\sqrt{2}};\sqrt{3+2\sqrt{2}};-\sqrt{3-2\sqrt{2}};\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right\}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn